

**O TEOREMA DE BORSUK-ULAM.** Thaís Jordão, João Peres Vieira, Matemática - Matemática - Departamento de Matemática - Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - IGCE - Campus de Rio Claro.

Consideremos  $I = [0, 1]$ ,  $X$  um espaço topológico e  $x_0$  um ponto de  $X$ .

**Definição:** Por um laço em  $X$  baseado em  $x_0$  entendemos uma função contínua  $\alpha : I \rightarrow X$  tal que  $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ .

Denotemos  $\Omega(X, x_0)$  o conjunto de todos os laços em  $X$  baseados em  $x_0$ .

**Definição:** Dados  $\alpha$  e  $\beta$  laços em  $X$  baseados em  $x_0$ , dizemos que  $\alpha$  é homotópico a  $\beta$ , se existe uma aplicação  $F : I \times I \rightarrow X$  contínua tal que:

$$1) H(t, 0) = \alpha(t); H(t, 1) = \beta(t), \forall t \in I$$

$$2) H(0, s) = x_0 = H(1, s), \forall s \in I$$

A aplicação  $H$  é dita ser uma homotopia entre  $\alpha$  e  $\beta$  e usaremos a notação  $\alpha \sim \beta$  para significar que  $\alpha$  é homotópico a  $\beta$ .

É fácil verificar que a relação  $\sim$  é uma relação de equivalência em  $\Omega(X, x_0)$ .

**Definição:** Se  $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$ , definimos o laço justaposto  $(\alpha * \beta) : I \rightarrow X$  por

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Então o conjunto quociente  $\frac{\Omega(X, x_0)}{\sim}$  munido da operação  $[\alpha].[\beta] = [\alpha * \beta]$  é um grupo, chamado o grupo fundamental de  $X$  com ponto base  $x_0$ , o qual será denotado por  $\pi_1(X; x_0)$ .

Quando  $X$  é conexo por caminhos é um resultado conhecido que este grupo independe do ponto base, razão pela qual simplesmente o denotaremos por  $\pi_1(X)$ .

Também podemos definir homotopia entre aplicações, da seguinte forma:

**Definição:** Sejam  $f, g : X \rightarrow Y$  aplicações contínuas, onde  $X$  e  $Y$  são espaços topológicos. Dizemos que  $f$  é homotópica a  $g$  relativamente a  $A \subset X$  se existe uma aplicação contínua  $H : X \times I \rightarrow Y$  tal que:

$$1) H(x, 0) = f(x) \text{ e } H(x, 1) = g(x); \forall x \in X$$

$$2) H(a, t) = f(a) = g(a); \forall a \in A \text{ e } \forall t \in I$$

A aplicação  $H$  é dita ser uma homotopia entre  $f$  e  $g$ . Notação:  $f \sim_A g$ .

A partir disso, diremos que um espaço topológico é contrátil quando existir  $x_0 \in X$  tal que as aplicações  $Id_X : X \rightarrow X$  dada por  $Id_X(x) = x$  e  $K_{x_0} : X \rightarrow X$  dada por

$K_{x_0}(x) = x_0, \forall x \in X$  forem homotópicas. Isto nos diz que um espaço topológico contrátil pode ser deformado continuamente em um único ponto.

Usando as definições acima e alguns resultados auxiliares, é possível obter os seguintes resultados:

- 1)  $\pi_1(\mathbf{S}^1) = \mathbf{Z}$ , onde  $\mathbf{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ .
- 2) O disco  $\mathbf{D} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$  é contrátil.
- 3) Se um espaço topológico  $X$  é contrátil, então  $\pi_1(X) = \{0\}$ .
- 4)  $\pi_1(\mathbf{D}) = \{0\}$ .

Agora, considerando um caminho  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{S}^1$ , o caminho  $\bar{\gamma} : I \rightarrow \mathbf{R}$  é dito ser um levantamento de  $\gamma$  à reta real  $\mathbf{R}$  se  $p \circ \bar{\gamma} = \gamma$ , onde  $p : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}^1$  definida por  $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$  é a aplicação exponencial.

Se o caminho  $\gamma$  é tal que  $\gamma(0) = (1, 0)$ , então sempre existirá um levantamento  $\bar{\gamma}$  de  $\gamma$  tal que  $\bar{\gamma}(0) = 0$ . Assim, definimos o grau de um caminho, denotado por  $gr(\gamma)$ , como sendo o número  $\bar{\gamma}(1)$  o qual é um número inteiro.

**Definição:** O grau de uma aplicação  $f : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1$  contínua, denotado por  $gr(f)$ , é o grau do caminho  $f \circ p_0$ , onde  $p_0$  é a restrição da aplicação exponencial,  $p$ , ao intervalo  $I = [0, 1]$ . Ou seja,  $gr(f) = gr(f \circ p_0) = \hat{f}(1)$  onde  $\hat{f}$  é o levantamento do caminho  $f \circ p_0$ .

A seguir veremos alguns lemas que servirão como ferramentas para demonstrarmos o Teorema de Borsuk-Ulam.

**Lema 1:** Seja  $\gamma : I \rightarrow X$  um caminho. Existe  $\bar{\gamma} : \mathbf{S}^1 \rightarrow X$  tal que  $\gamma = \bar{\gamma} \circ p_0$  se, e somente se,  $\gamma$  é um laço.

**Demonstração:** Suponhamos que  $\gamma$  é um caminho que pode ser escrito como  $\gamma = \bar{\gamma} \circ p_0$ , onde  $\bar{\gamma} : \mathbf{S}^1 \rightarrow X$ . Então  $\gamma(0) = (\bar{\gamma} \circ p_0)(0) = \bar{\gamma}(p_0(0)) = \bar{\gamma}(p_0(1)) = \gamma(1)$ , pois  $p_0(1) = p_0(0)$ . Logo,  $\gamma$  é um laço.

Reciprocamente, se  $\gamma$  é um laço, então  $\gamma(0) = \gamma(1)$ . Consideremos  $\bar{\gamma} : \mathbf{S}^1 \rightarrow X$  definida por  $\bar{\gamma}(x) = \gamma(t_x)$ , onde  $t_x \in I$  é tal que  $p_0(t_x) = x$ . Tal  $t_x$  sempre existe pois a aplicação  $p_0$  é sobrejetora.

Temos que  $\bar{\gamma}$  está bem definida, pois  $\gamma$  é um laço. Também é contínua pois está definida em função de  $\gamma$  que é contínua. Seja  $t \in I$  qualquer,  $(\bar{\gamma} \circ p_0)(t) = \gamma(t)$  pela definição de  $\bar{\gamma}$ . Portanto,  $\gamma = \bar{\gamma} \circ p_0$ .

**Lema 2:** Seja  $f : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1$  contínua. A aplicação  $f$  é homotópica a uma constante se, e somente se, existe  $\tilde{f} : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{R}$  contínua tal que  $f = p \circ \tilde{f}$ .

**Demonstração:** Suponhamos que  $f$  seja homotópica a uma constante. Então, o caminho  $f \circ p_0$  é homotópico a uma constante o que implica  $gr(f) = gr(f \circ p_0) = 0$ . Logo,

$\widehat{f}(0) = \widehat{f}(1) = 0$ , onde  $\widehat{f}$  é o levantamento do caminho  $f \circ p_0$ , e portanto  $\widehat{f}$  é uma laço. Pelo lema anterior sabemos que existe  $\widetilde{f} : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{R}$  tal que  $\widehat{f} = \widetilde{f} \circ p_0$ .

Segue que,  $p \circ \widehat{f} = p \circ \widetilde{f} \circ p_0$  mas  $p \circ \widehat{f} = f \circ p_0$  pois  $\widehat{f}$  é o levantamento de  $f \circ p_0$ . Logo,  $p \circ \widetilde{f} \circ p_0 = f \circ p_0$  o que implica  $p \circ \widetilde{f} = f$  já que  $p_0$  é sobrejetora.

Recíprocamente, suponhamos que exista  $f : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{R}$  contínua tal que  $f = p \circ \widetilde{f}$ .

Temos que  $\mathbf{R}$  é contrátil, ou seja,  $id_{\mathbf{R}} \sim k_0$  onde  $id_{\mathbf{R}}(x) = x$  e  $k_0(x) = k_0$  para todo  $x \in \mathbf{R}$ . Assim,  $\widetilde{f} = id_{\mathbf{R}} \circ \widetilde{f} \sim k_0 \circ \widetilde{f} = k'_0$  onde  $k'_0 : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{R}$  é constante e igual a  $k_0$ .

Logo,  $\widetilde{f} \sim k'_0$  o que implica  $f = p \circ \widetilde{f}$  homotópica a uma constante.

**Lema 3:** Seja  $f : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1$  uma aplicação contínua homotópica a uma constante. Então, existe  $y \in \mathbf{S}^1$  tal que  $f(-y) = f(y)$ .

**Demonstração:** Pela hipótese, utilizando o lema anterior, temos que existe uma aplicação  $\widetilde{f} : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{R}$  contínua tal que  $f = p \circ \widetilde{f}$ . Seja  $y_0 \in \mathbf{S}^1$  qualquer.

Se  $\widetilde{f}(-y_0) = \widetilde{f}(y_0)$ , então este é o ponto procurado e o lema estará demonstrado.

Caso contrário, temos que  $\widetilde{f}(-y_0) \neq \widetilde{f}(y_0)$ . Desta forma, definimos  $g : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{R}$  por  $g(y) = \widetilde{f}(y) - \widetilde{f}(-y)$ . Tal aplicação é contínua e

$$g(y_0) = \widetilde{f}(y_0) - \widetilde{f}(-y_0) = -(\widetilde{f}(-y_0) - \widetilde{f}(y_0)) = -g(-y_0) \neq 0.$$

Logo,  $g$  assume valores de sinais opostos em  $y_0$  e em  $-y_0$ , implicando na existência de  $y_1 \in \mathbf{S}^1$  tal que  $g(y_1) = 0$ , ou seja,  $\widetilde{f}(y_1) = \widetilde{f}(-y_1)$ .

Logo,  $f(y_1) = (p \circ \widetilde{f})(y_1) = (p \circ \widetilde{f})(-y_1) = f(-y_1)$ .

Por extensão de uma aplicação  $g : X \rightarrow X$ , entendemos uma aplicação  $h : Y \rightarrow X$  tal que  $h \circ i = g$ , onde  $X \subset Y$  e  $i$  denota a inclusão de  $X$  em  $Y$ .

**Lema 4:** Se  $g : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1$  é uma aplicação contínua que se estende ao disco  $D$ , então  $g$  é homotópica a uma constante.

**Demonstração:** Como  $g$  se estende ao disco, temos que existe uma aplicação  $h : D \rightarrow \mathbf{S}^1$  tal que  $h \circ i = g$ , onde  $i : \mathbf{S}^1 \rightarrow D$  é a inclusão.

Pelo fato de  $D$  ser contrátil existe  $x_0 \in D$  tal que  $id_D \sim k_{x_0}$ , onde  $id_D$  denota a aplicação identidade do disco no disco e  $k_{x_0}$  denota a aplicação constante igual a  $x_0$ . Isto implica que  $g = h \circ i = h \circ id_D \circ i \sim h \circ k_{x_0} \circ i = k_{h(x_0)}$ , onde  $k_{h(x_0)}(x) = h(x_0)$  para todo  $x \in D$  é a aplicação constante.

Portanto,  $g$  é homotópica a uma constante.

Como consequência destes lemas temos o

**Teorema de Borsuk-Ulam:** Seja  $f : \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  uma aplicação contínua qualquer. Então, existe  $x \in \mathbf{S}^2$  tal que  $f(x) = f(-x)$ .

**Demonstração:** Suponhamos que  $f(x) \neq f(-x)$ , para todo  $x \in \mathbf{S}^2$ .

Consideremos  $(\mathbf{S}^2)^+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{S}^2; x_3 \geq 0\}$  o hemisfério superior da esfera  $\mathbf{S}^2$ . Então, pela suposição feita, devemos ter que para todo  $y \in (\mathbf{S}^2)^+$ ,  $f(y) \neq f(-y)$ . Desta

forma, podemos definir  $g : (\mathbf{S}^2)^+ \rightarrow \mathbf{S}^1$  da seguinte maneira  $g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{\|f(x)-f(-x)\|}$ , a qual é contínua.

Olhemos  $\mathbf{S}^1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{S}^2; x_3 = 0\}$  e consideremos a seguintes aplicações:

- $i : \mathbf{S}^1 \rightarrow D$ , definida por  $i(x, y, 0) = (x, y)$  para todo  $(x, y, 0) \in \mathbf{S}^1$ ;
- $h : D \rightarrow (\mathbf{S}^2)^+$ , definida por  $h(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$  para todo  $(x, y) \in D$ .

Através desta aplicação  $h$ , obtemos uma nova aplicação  $g \circ h : D \rightarrow \mathbf{S}^1$ , a qual é uma extensão de  $g|_{\mathbf{S}^1}$  ao disco. De fato, para todo  $(x, y, 0) \in \mathbf{S}^1$  temos:

$$((g \circ h) \circ i)(x, y, 0) = (g \circ h)(x, y) = g(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) = g(x, y, 0), \text{ pois } x^2 + y^2 = 1$$

Logo,  $(g \circ h) \circ i = g|_{\mathbf{S}^1}$  nos permitindo concluir, pelo Lema 4, que  $g|_{\mathbf{S}^1}$  é homotópica a uma constante.

Agora, pelo Lema 3, temos que existe  $y \in \mathbf{S}^1$  tal que  $g|_{\mathbf{S}^1}(-y) = g|_{\mathbf{S}^1}(y)$ . Mas  $g|_{\mathbf{S}^1}(-y) = -g|_{\mathbf{S}^1}(y)$  o que implica  $g|_{\mathbf{S}^1}(y) = 0$  ou equivalentemente  $f(y) = f(-y)$ , contradizendo a suposição.

Portanto, existe  $x \in \mathbf{S}^2$  tal que  $f(x) = f(-x)$ . ■

O teorema acima nos diz que uma aplicação contínua de  $S^2$  em  $\mathbf{R}^2$  não pode ser injetora.

### Referências Bibliográficas

1. ANDRADE, M.G.C., FANTI, E.L.C., Notas de Seminários: Grupo Fundamental - Uma visão geométrica.
2. WALL, CTC, Introduction to Topology Algebraic, Addison-Wesley Series In Mathematics, Addison-Wesley Publishing Company, 1972.
3. LIMA, E.L., Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPQ, Projeto Euclides, 1998.